Lei de Planck

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Instituto de Física. Departamento de Física. Física do Século XXA (FIS1056). Prof. César Augusto Zen Vasconcellos. **Lista 3** (*Site: www.cesarzen.com*)

Tópicos. Lei de Stefan[1]. Lei do Deslocamento de Wien[2]. Distribuição Espectral de Corpo Negro: Lei de Rayleigh[3] (John William Strutt) (Inglaterra, 1842-1919) e James Hopwood Jeans (Inglaterra, 1877-1946); Lei de Planck[4] (Alemanha, 1858-1947).

Lei de Stefan

Jožef Stefan descobriu, em 1879, uma relação empírica para descrever a radiação emitida por um corpo negro:

$$\mathcal{R}_T = \sigma T^4 \tag{1}$$

onde $\mathcal{R_T}$ representa a potência irradiada por unidade de área[5], T a temperatura de irradiação, e σ é uma constante (constante de Stefan), sendo $\sigma = 5,6705 \times 10^{-8} W/m^2K^4$.

A relação (1), hoje conhecida como Lei de Stefan-Boltzmann[6], estabelece que a energia total irradiada, por unidade de área superficial e por unidade de tempo, por um corpo negro, é diretamente proporcional à quarta potência da sua temperatura termodinâmica T.

De acordo com esta lei, a potência por unidade de área depende apenas de sua temperatura e independe, portanto, de sua composição. Resultados experimentais demonstram que, da mesma forma que a potência total irradiada por um corpo negro depende apenas de sua temperatura, a distribuição espectral da radiação $\mathcal{R}_T(\lambda)$ (ou, de maneira equivalente, $\mathcal{R}_T(\nu)$) emitida por um corpo negro também depende, apenas, de sua temperatura.

Usando a representação matemática equivalente $u(\lambda, T) \equiv \mathcal{R}_T(\lambda)$, ou ainda na forma $u(\lambda)$, a figura (1) apresenta, em função de

[1] Jožef Stefan, Eslovenia, 1835 - 1893.

[2] Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien (Alemanha, 1864 - 1928) recebeu o Prêmio Nobel de Física em 1911 por seus estudos no campo da radiação térmica.

[3] Lord Rayleigh descobriu, juntamente com William Ramsay, o elemento ArgÔnio e recebeu por esta descoberta o Prêmio Nobel em Física de 1904.

[4] Max Karl Ernst Ludwig Planck é conhecido como o fundador da MecÂnica QuÂntica, Planck Recebeu o Prêmio Nobel de Física em 1918.

[5] Em física, o termo potência ($P = dE/dt$) define a variação da energia por unidade de tempo. Neste sentido, assim como a variação da posição de um corpo com o tempo caracteriza sua rapidez no espaço-tempo, $\mathcal{R}_T$ caracteriza a variação da densidade superficial de energia irradiada no espaço de energia-tempo, ou seja a "rapidez"com que energia por unidade de área é emitida pelo corpo negro. Ao multiplicarmos por 2 a temperatura do corpo, a energia irradiada por unidade de tempo é multiplicada, devido a dependencia T^4, por 16. Os corpos não-negros irradiam energia por unidade de área com uma taxa menor do que um corpo negro. No caso de um corpo não-negro, a lei de Stefan fica dada por $\mathcal{R}_T = \epsilon\sigma T^4$ onde o fator ϵ, chamado de emissividade, não depende da temperatura do corpo e obedece de maneira geral a relação $\epsilon \leq 1$; o fator ϵ é igual a 1 para um corpo negro e menor do que 1 para outros corpos.

[6] Ludwig Eduard Boltzmann (Austria, 1844 - 1906) foi um físico que se tornou conhecido por seus estudos nos campos da mecânica estatística e da termodinâmica estatística.

λ, para um dado valor de T, o comportamento da função $\mathcal{R}_T(\lambda)$ (ou equivalentemente de $u(\lambda, T)$). É importante notar que a função (1) é dada por[7]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_T &= \int_0^\infty \mathcal{R}_T(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \mathcal{R}_T(\nu)d\nu \quad (2) \\ &= \int_0^\infty u(\lambda, T)d\lambda = \int_0^\infty u(\nu, T)d\nu, \end{aligned}$$

e é conhecida também como *radiância espectral.*

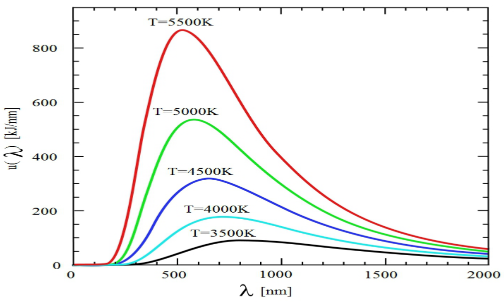

Figura 1: Espectro de radiação de corpo negro.

Lei do Deslocamento de Wien

O comportamento das curvas na figura (1) que representa a distribuição espectral da radiação de corpo negro mostra que o comprimento de onda e a freqüência para o qual a intensidade da radiação emitida tem valores máximos varia inversamente com a temperatura, ou seja

$$\lambda_{R_T^{max}} \sim \frac{1}{T} = \frac{c}{\nu_{R_T^{max}}}\,, \qquad (3)$$

pois $\lambda\nu = c$, de forma que $\lambda_{max}\nu_{max} = c$ e consequentemente o produto entre a freqüência espectral, correspondente ao valor máximo de $\mathcal{R}_T(\nu)$ e o correspondente comprimento de onda da radiação é igual à velocidade da luz, c.

Por outro lado, os dados experimentais mostram que o produto entre λ_{max} e T obedece à relação

$$\lambda_{R_T^{max}} T = C_W\,, \qquad (4)$$

onde C_W representa uma constante. Este resultado é conhecido como lei do deslocamento de Wien e foi obtida por Wilhem Jan Wien em 1893. O valor experimental da constante acima (chamada de *constante de dispersão de Wien*) é $C_W = 2,898 \times 10^{-3} mK$.

Uma conseqüência da lei de Wien é que, quanto maior a temperatura de um corpo negro, menor é o comprimento de onda no qual ele emite[8].

Equação de Rayleigh-Jeans

Uma importante contribuição no estudo do espectro de corpo negro foi dada por Rayleigh e Jeans em 1905. Desejavam os autores deste trabalho memorável, que resultou na lei de Rayleigh e Jeans, determinar a função de distribuição espectral, $\mathcal{R}_(\lambda)$, para um corpo negro. A determinação desta função envolve o cálculo da densidade de energia das ondas eletromagnéticas confinadas no interior de uma cavidade.

Consideremos para tal uma cavidade esférica com raio L, com uma pequena abertura para o exterior. A probabilidade de que um raio de luz penetre na cavidade e torne a sair sem ser absorvido é pequena no caso em que as dimensões do orifício sejam expressivamente me-

[7] No estudo da radiação de corpo negro, a distribuição espectral caracteriza o comportamento da função $\mathcal{R}_T(\lambda)$, ou seja, caracteriza a potência emitida por unidade de área na região de emissividade do corpo negro correspondente ao comprimento de onda λ.

[8] Por exemplo, a temperatura da fotosfera solar é de $5780\,^oF$ e o pico de emissão se produz a $475nm$. Como $1\mathring{A} = 10^{-10}m$, resulta que o máximo de emissão ocorre à $4750\mathring{A}$. Como o espectro visível se extende desde aproximadamente $4000\mathring{A}$ até aproximadamente $7400\mathring{A}$, este comprimento de onda está dentro do espectro visível e corresponde a um tom de verde. Entretanto, devido a dispersão de Rayleigh da luz azul pela atmosfera, o componente azul se separa distribuindo-se pela abóbada celeste e o Sol aparece na cor amarela.

nores do que as dimensões do corpo como um todo. As paredes da cavidade, aquecidas, emitem radiação eletromagnética na faixa térmica das freqüências. Ondas eletromagnéticas em uma cavidade deveriam satisfazer, segundo os autores, a lei clássica de propagação do campo eletromagnético $\mathcal{E}$ em três dimensões:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}. \tag{5}$$

A solução desta equação deve dar amplitude nula nas paredes da cavidade pois outro resultado representaria dissipação de energia e violação da condição de equilíbrio. Ou seja, a solução desta equação corresponde a uma onda estacionária:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = &\ \mathcal{E}_0 sen(\frac{n_x \pi x}{L}) sen(\frac{n_y \pi y}{L}) \\ \times &\ sen(\frac{n_z \pi z}{L}) sen(\frac{2\pi c t}{\lambda}), \end{aligned} \tag{6}$$

onde n_x, n_y e n_z representam números inteiros. Substituição desta solução na equação anterior

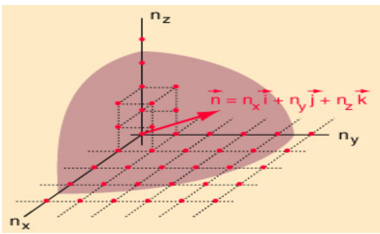

Figura 2: *Grid* de soluções.

Créditos: http://electrons.wikidot.com/term-papers

fornece

$$\left(\frac{n_x \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \tag{7}$$

equação esta que pode ser sintetizada na forma

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2}. \tag{8}$$

É importante notar que, embora as grandezas n_x, n_y e n_z representem individualmente números inteiros, a combinação destas grandezas na forma expressa pela equação acima não corresponde a um número inteiro.

Quantos modos de oscilação estacionários, que satisfazem a condição (8), podem existir na cavidade? Esta pergunta é equivalente a realizar as perguntas: a) quantas ondas estacionárias distintas *cabem* no interior da cavidade de corpo negro? Ou então: b) quantas são as combinações possíveis dos distintos valores das grandezas n_x, n_y e n_z? Ou ainda: c) quantas soluções da equação (6) existem no interior da cavidade?

A resposta a esta indagação é equivalente à contagem de todas as combinações dos números inteiros n_x, n_y e n_z que satisfazem a equação (8). Para determinar a quantidade de soluções possíveis, Rayleigh e Jeans conceberam um espaço tridimensional com eixos ortogonais 1, 2 e 3 e trataram o número de combinações possíveis das grandezas n_x, n_y e n_z, de uma forma aproximada, como sendo o volume de um *grid* tridimensional construído usando os distintos valores possíveis destas grandezas. Usando então a expressão matemática para o volume V de uma esfera de raio R

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3, \tag{9}$$

e definindo o *raio da esfera*, n, correspondente ao volume de soluções no espaço subtendido pelos eixos 1, 2 e 3 na forma $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ Rayleigh e Jeans obtiveram então o volume de soluções:

$$V_n = \frac{4\pi}{3} n^3 = \frac{4\pi}{3}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)^{3/2}. \tag{10}$$

Esta expressão apresenta dois problemas. O primeiro diz respeito ao fato da utilização de uma esfera como protótipo volumétrico do espaço de soluções correspondentes ao *grid* subtendido pelos eixos 1, 2 e 3: enquanto as soluções da equação de onda correspondem apenas a valores positivos das grandezas n_x, n_y

e n_z, o módulo considerado pelos autores contempla também valores negativos destas grandezas. E como a esfera de valores destas grandezas contém 8 quadrantes, 7 destes quadrantes não são fisicamente aceitáveis. Por esta razão, o resultado obtido na expressão (10) deve ser dividido pelo número 8. O segundo problema diz respeito ao fato de que as ondas eletromagnéticas confinadas na cavidade podem ser polarizadas em duas direções ortogonais. Portanto o resultado acima deve ser multiplicado por 2. Após estas correções, o resultado acima pode ser reescrito na forma

$$V_n = \frac{2}{8} \times \frac{4\pi}{3} n^3 = \frac{\pi}{3} \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \right)^{3/2} \rightarrow \mathcal{N}, \tag{11}$$

e pode ser tomado como uma medida do número de modos das soluções das ondas eletromagnéticas estacionárias confinadas no interior da cavidade, $\mathcal{N}$. Na realidade esta quantidade, como citamos anteriormente, é uma aproximação, mas seu grau de validade é expressivo, ainda mais quando consideramos uma cavidade cujas dimensões são muito maiores do que o comprimento das ondas eletromagnéticas correspondentes.

Combinando esta equação com a expressão (8) obtemos então para o número de modos:

$$\mathcal{N} = \frac{\pi}{3} \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \right)^{3/2} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{4L^2}{\lambda^2} \right)^{3/2} \tag{12}$$

ou ainda

$$\mathcal{N} = \left(\frac{8\pi L^3}{3\lambda^3} \right) \tag{13}$$

Quantos modos por unidade de comprimento de onda existem? Após determinarmos o número absoluto de ondas estacionárias (soluções) contidas na cavidade, consideramos a seguir o número de ondas estacionárias (soluções) por unidade de comprimento de onda. Esta grandeza pode ser obtida por meio da expressão

$$\frac{d\mathcal{N}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{8\pi L^3}{3\lambda^3} \right] = - \left[\frac{8\pi L^3}{\lambda^4} \right]. \tag{14}$$

O sinal negativo nesta expressão indica que o número de modos decresce com o crescimento do comprimento de onda.

O passo seguinte é a obtenção do número de modos por unidade de volume por unidade de comprimento de onda $\mathcal{M}_\lambda$

$$\mathcal{M}_\lambda = |\frac{1}{L^3} \frac{d\mathcal{N}}{d\lambda}| = \frac{8\pi}{\lambda^4}. \tag{15}$$

Note-se que o resultado obtido independe do volume da cavidade, dependendo porém somente do comprimento de onda da radiação.

A pergunta seguinte realizada por Rayleigh e Jeans foi: qual a quantidade de energia contida na cavidade? Para responder esta pergunta foi utilizado o Princípio da Equipartição da Energia[9] onde cada onda estacionária tem energia igual a $k_B T$. Portanto, $\mathcal{N}$ ondas tem energia total

$$E = \mathcal{N} k_B T \tag{16}$$

e densidade de energia

$$\mathcal{D}_T = \frac{E}{L^3} = |\frac{\mathcal{N} k_B T}{L^3}| \tag{17}$$

a quantidade de energia na cavidade por unidade de volume e por unidade de comprimento

[9] O Teorema ou Princípio da Equipartição da Energia estabelece que cada modo de oscilação, em equilíbrio no interior da cavidade, tem energia média $k_B T/2$, onde k_B é a constante de Boltzmann; como são considerados dois modos de oscilação por onda estacionária, cada uma delas tem energia média $k_B T$. Este resultado pode ser obtido por meio do cálculo da energia média utilizando-se a fórmula de distribuição clássica de Boltzmann que é adequada para a descrição de variáveis contínuas $\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E P_B(E) dE}{\int_0^\infty P_B(E) dE} = k_B T$, onde $P_B(E) = e^{-E/k_B T}$. Portanto Rayleigh e Jeans consideraram que todas as ondas da cavidade tem a mesma energia térmica.

de onda é dada por

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{D}_T = \frac{1}{L^3}\frac{dE}{d\lambda} = \frac{k_BT}{L^3}|\frac{d\mathcal{N}}{d\lambda}| = \frac{8\pi k_BT}{\lambda^4}, \tag{18}$$

que pode ser escrita na forma

$$\mathcal{D}_T = \int d\mathcal{D}_T = \int d\mathcal{D}_T(\lambda)d\lambda = \int \frac{8\pi k_BT}{\lambda^4}d\lambda, \tag{19}$$

onde $\mathcal{D}_T(\lambda)$ é dado pelo produto entre o número de modos por unidade de volume por unidade de comprimento de onda, $\mathcal{M}_\lambda$, e a energia média das ondas eletromagnéticas, k_BT,

$$\mathcal{D}_T(\lambda) = \bar{E}\mathcal{M}_\lambda = \frac{8\pi k_BT}{\lambda^4}, \tag{20}$$

Esta é a famosa lei de Rayleigh-Jeans. Tendo em vista que $\mathcal{M}_\lambda$ também pode ser escrito na forma

$$\mathcal{M}_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \tag{21}$$

a lei Rayleigh-Jeans pode também ser escrita como

$$\mathcal{D}_T(\nu) = k_BT\frac{8\pi\nu^2}{c^3}. \tag{22}$$

Este resultado leva à *catástrofe dos ultravioletas* pois para $\lambda \to 0$, uma vez que $\lambda\nu = c$, então $\nu \to \infty$ e obtemos, neste caso, da expressão $(22), \mathcal{D}_T(\nu) \to \infty$. Este resultado, como afirmamos anteriormente, não é fisicamente plausível.

A Lei de Planck

Em 1901, Planck enunciou uma lei que superava as limitações da lei de Rayleigh-Jeans. Ele percebeu que a lei clássica da radiação de corpo negro dava resultados satisfatórios para baixas freqüências (longos comprimentos de onda) e que para ajustar os dados experimentais da função distribuição de densidade de energia de um corpo negro, a energia média das ondas estacionárias, ao invés de ser uma constante, k_BT, como determina a teoria clássica, deveria depender do comprimento de onda ou, equivalentemente, da freqüência. E, ao invés de supor que esta energia era descrita por uma variável contínua[10], ele supôs um conceito de difícil aceitação à época, que a energia destas ondas era descrita por uma variável discreta, ou seja, uma variável que poderia assumir os valores:

$$E_n = 0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, ..., nh\nu, \tag{23}$$

onde E_n representa a energia de cada onda e n é um número inteiro, introduzindo assim a constante h, hoje conhecida como constante de Planck. E para calcular a energia média das ondas estacionárias na cavidade, Planck reescreveu a função de distribuição clássica de Boltzmann[11] (ver expressão (9)), adequada para a descrição de variáveis contínuas, na forma (distribuição de Planck)

$$P(E_n) = \exp^{-E_n/k_BT} = \exp^{-nh\nu/k_BT} \tag{24}$$

de modo que a energia média das ondas estacionárias é dada agora pela expressão

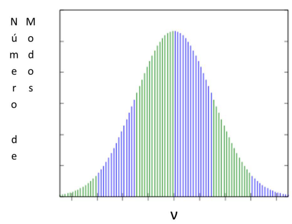

Figura 3: Distribuição Estatística de Planck. Distribuição Estatística de Planck.

Créditos: http://astro1.panet.utoledo.edu/

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_nP(E_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n)}. \tag{25}$$

[10] O espectro de radiação de corpo negro é contínuo. Por isto os físicos à época não podiam conceber que as energias das ondas eletromagnéticas confinadas na cavidade não fossem também descritas por variáveis contínuas.

[11] Também conhecida como lei de distribuição estatística de Maxwell-Boltzmann.

Esta suposição implica em que os modos mais altos de freqüência seriam menos populados de modo a evitar a catástrofe dos ultravioletas da Lei de Rayleigh-Jeans. A soma acima tem como resultado

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{\exp^{h\nu/k_B T} - 1} = \frac{hc/\lambda}{\exp^{hc/k_B T\lambda} - 1} \quad (26)$$

ou seja, a energia média depende agora da freqüência de oscilação.

A fórmula de Planck é obtida por meio da combinação das expressões (21), (22) e (26), substituindo-se portanto na expressão abaixo

$$\mathcal{D}_T(\lambda) = \bar{E}\mathcal{M}_\lambda = \frac{8\pi\bar{E}}{\lambda^4} = \frac{8\pi\nu^2\bar{E}}{c^3}, \quad (27)$$

a energia média clássica $k_B T$ por

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{\exp^{h\nu/k_B T} - 1} = \frac{hc/\lambda}{\exp^{hc/k_B T\lambda} - 1}$$

obtendo-se então

$$\mathcal{D}_T(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{\exp^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (28)$$

e

$$\mathcal{D}_T(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp^{hc/k_B T\lambda} - 1}. \quad (29)$$

Esta é a Lei de Planck, que reproduz fielmente os resultados experimentais correspondentes à distribuição espectral da densidade de energia de um corpo negro.

Problemas

1. Se supusermos que as superfícies estelares se comportam como um corpo negro, podemos obter uma boa estimativa de suas temperaturas medindo-se λ_{max}. Para o sol, $\lambda_{R_T^{max}} = 5100$Å, enquanto que para a estrela do norte (estrela polar), $\lambda_{R_T^{max}} = 3500$Å. a) Determine, usando a Lei de Wien, as temperaturas das superfícies destas estrelas. b) Usando a lei de Stefan-Boltzmann e as temperaturas obtidas no caso anterior, determine a potência irradiada por $1cm^2$ da superfície estelar. Soluções: a) $T_{Sol} = 5700^oK$, $T_{EN} = 8300^oK$; b) $R_{T,Sol} = 6000W/cm^2$, $R_{T,EN} = 27000W/cm^2$.

2. Suponha dois pequenos corpos opacos separados por uma grande distância, sustentados por fios em um grande recipiente, onde se faz vácuo, e cujas paredes são opacas e mantidas a temperatura constante. Neste caso, os corpos e as paredes podem trocar energia através de radiação. Seja e a taxa de emissão e a a taxa de absorção de energia. Mostre que, no equilíbrio: $e_1/a_1 = e_2/a_2 = 1$.

3. A lei clássica de equipartição de energia preve que cada onda estacionária em uma cavidade tem energia média dada por $E = k_B T$. Usando a lei de distribuição de Boltzmann, $P(E) = \exp^{-E/k_B T}$, mostre que a energia média é
$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty EP(E)dE}{\int_0^\infty P(E)dE} = k_B T$$
.

4. Deduzir a Lei de Planck. De acordo com a Lei de Planck, qual é a energia média de um oscilador cuja freqüência é $k_B T/h$? Constante de Planck: $h = 6,626 \times 10^{-34}\,J.s = 4,136 \times 10^{-15}\,eV.s$. Solução: $0,582 k_B T$. Use a Lei de Planck para mostrar que a densidade total de energia de um corpo negro é proporcional a T^4 como afirma a lei de Stefan-Boltzmann.

5. O máximo da densidade espectral $\mathcal{D}_T(\lambda)$ corresponde a uma temperatura estelar de 3000^oK. Se a potência irradiada pela estrela é 100 vezes maior que a potência irradiada pelo Sol, qual é o tamanho da estrela? Solução: $37,4R\odot$.