Relatividade Especial: massa e energia

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Instituto de Física. Departamento de Física. Física do Século XXA (FIS1056). Prof. César Augusto Zen Vasconcellos. **Lista 7** (*Site: www.cesarzen.com*)

Tópicos. Massa e Energia na Relatividade Especial. Produção de Pares. Aniquilação de Pares. Raios-X e o Efeito Compton (Arthur Holly Compton (1892-1962)).

Transformação de Velocidades na Relatividade Especial

Das equações que descrevem as transformações de Lorentz anteriormente apresentadas, podemos escrever

$$\left.\begin{array}{rcl} dx' & = & \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ dt' & = & \frac{dt - (\frac{v}{c^2})\,dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right\} ; \quad \left.\begin{array}{rcl} dy' & = & dy \\ dz' & = & dz \end{array}\right\} . \tag{1}$$

Destas equações obtemos então, para a componente u'_x do vetor velocidade $\vec{u}'$ de um corpo localizado na posição x' instantânea do referencial inercial $\mathcal{O}'$:

$$\begin{aligned} u'_x = \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx - v\,dt}{dt - (\frac{v}{c^2})\,dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - (\frac{v}{c^2})\,\frac{dx}{dt}} \\ &\to \; u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (\frac{v}{c^2})\,u_x} , \end{aligned} \tag{2}$$

onde u_x representa a componente espacial correspondente do vetor velocidade $\vec{u}$ no referencial $\mathcal{O}$.

Similarmente, obtemos as demais componentes do vetor velocidade $\vec{u}$, ou seja, u'_y, na direção y'

$$\begin{aligned} u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt - (\frac{v}{c^2})\,dx}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{\frac{dy}{dt}}{1 - (\frac{v}{c^2})\,\frac{dx}{dt}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &\to \; u'_y = \frac{u_y}{1 - (\frac{v}{c^2})\,u_x}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} , \end{aligned} \tag{3}$$

e u'_z, na direção z':

$$u'_z = \frac{u_z}{1 - (\frac{v}{c^2})\,u_x}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} . \tag{4}$$

Massa e Energia na Relatividade Especial

Consideremos agora, por simplicidade, o problema da conservação de momentum linear de uma partícula de mass m, se movendo no seu referencial próprio, $\mathcal{O}'$, com velocidade $u' = (0, u'_y, 0)$, supondo ademais por simplicidade que $u_x = 0$. Queremos examinar neste caso a conservação de momentum linear nas direções y e y'.

Da equação (3) obtemos, por simetria, no referencial $\mathcal{O}$, a seguinte expressão para a componente y do vetor velocidade u, ou seja, u_y:

$$u_y = u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{5}$$

Aplicando a estas equações a lei de conservação de momentum linear, $P^y_{\mathcal{O}} = P^y_{\mathcal{O}'}$, temos

$$P^y_{\mathcal{O}} = mu_y = mu'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = P^y_{\mathcal{O}'} \equiv m'u'_y\,. \tag{6}$$

Destas equações resulta então que a massa m se transforma, na relatividade especial, de acordo com

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{7}$$

onde representamos a massa m' da partícula em seu referencial próprio por m_0, ou seja, fazendo $v = 0$ na expressão acima, sendo m_0 denominada genericamente de *massa de repouso*. Esta expressão mostra ainda que se $v \to c$ então $m \to \infty$.

Na Mecânica Relativística, da mesma forma que ocorre na Mecânica Clássica, a energia cinética, E_c, de um corpo é definida por meio do trabalho realizado por uma força externa, $\vec{F}$, que ao atuar sobre o corpo, aumenta sua velocidade de zero a um valor, u, diferente de zero.

Matematicamente, podemos escrever a energia cinética do corpo por meio da seguinte expressão

$$E_c = \int_0^{a(u)} \vec{F}.d\vec{s}\,, \tag{8}$$

onde $\vec{F} = \vec{F}(\vec{s}) = \vec{F}(x,y,z)$ representa um força externa e $d\vec{s}$ define o vetor distância espacial elementar infinitesimal.

Para simplificar o cálculo da expressão acima, consideramos movimento unidimensional de um corpo de massa m sob a ação da força externa $\vec{F}$. Posteriormente podemos generalizar os resultados obtidos para o caso de movimento tri-dimensional. Neste caso a expressão acima se reduz a

$$\begin{aligned} E_c &= \int_0^{a(u)} F dx = \int_0^{a(u)} \frac{d}{dt}(mu)dx \\ &= \int_0^u d(mu)\frac{dx}{dt} = \int_0^u (m\,du + u\,dm)u \\ &= \int_0^u (mu\,du + u^2\,dm)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Da expressão (7), multiplicando ambos os lados da equação por $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ e elevando a expressão resultante ao quadrado, obtemos

$$\left(m\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = m_0\right)^2 \to m^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) = m_0^2\,. \tag{10}$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por c^2, resulta

$$\left(m\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = m_0\right)^2 c^2 \to m^2c^2 - m^2u^2 = m_0^2c^2. \tag{11}$$

Diferenciando ambos os lados desta equação obtemos

$$2mc^2\,dm - m^2 2u\,du - u^2 2m\,dm = 0\,. \tag{12}$$

Esta expressão pode ser escrita na forma

$$mu\,du + u^2\,dm = c^2\,dm\,. \tag{13}$$

Combinando as equações (9) e (13) obtemos, para a energia cinética, a expressão

$$E_c = \int_0^{a(u)} F dx = (m - m_0)\,c^2\,. \tag{14}$$

Ainda da equação (7), multiplicando ambos os lados da equação por $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, elevando a expressão resultante ao quadrado e multiplicando ambos os lados por c^4, obtemos então

$$m^2c^4 - m^2u^2c^2 = m_0^2c^4\,. \tag{15}$$

Desta expressão, definindo $E = mc^2$, $E_0 = m_0c^2$ e $|\vec{p}| = mu$, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} E^2 &= (pc)^2 + E_0^2 \qquad (16) \\ &\rightarrow \left(K + m_0c^2\right)^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 \,. \end{aligned}$$

Assim, na relatividade especial a energia de uma partícula livre de massa m, com velocidade u, é dada por

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}\,. \qquad (17)$$

Produção de Pares

No processo de produção de pares, a energia carregada por um fóton é totalmente convertida em matéria, resultando na criação de um par elétronpósitron (o pósitron é a antipartícula do elétron, sendo similar a ele, exceto no que se refere à carga elétrica, cujo sinal é oposto ao do elétron). Como a carga elétrica é conservada em processos deste tipo (a carga inicial do processo é nula, pois fótons não têm carga elétrica), partículas com cargas elétricas distintas devem ser então produzidas. De modo a produzir um par elétron-pósitron, o fóton incidente deve ter no mínimo energia equivalente à soma das energias de repouso do elétron e do pósitron. Excessos de energia aparecem neste caso como energia cinética das partículas produzidas. A produção de pares não pode ocorrer no espaço vazio. Por esta razão, indicamos na figura abaixo a presença de um núcleo. O núcleo carrega uma quantidade apreciável do momentum linear do fóton incidente mas devido à sua grande massa, sua energia cinética de recuo, E_{cr},

$$E_{cr} \sim \frac{p_r}{2M_n} \qquad (18)$$

onde M_n representa a massa nuclear, é usualmente desprezível na comparação com às demais energias cinéticas do elétron e do pósitron. Assim, a lei de conservação de energia pode ser aplicada ignorando-se a presença do núcleo (a lei de conservação de momentum linear entretanto não pode desconsiderar a presença do núcleo). A lei de conservação de energia indica que

$$hf = m_ec^2 + m_pc^2 = E_{ce} + E_{cp} + m_{e0}c^2 + m_{p0}c^2\,, \qquad (19)$$

onde m_{e0} é a massa em repouso do elétron, m_{p0} representa a massa em repouso do pósitron e E_{ce} e E_{cp} suas energias cinéticas. É importante salientar que o elétron e o pósitron tem idênticas massas de repouso, $m_{e0} = m_{p0} = 9,11 \times 10^{-31}$kg.

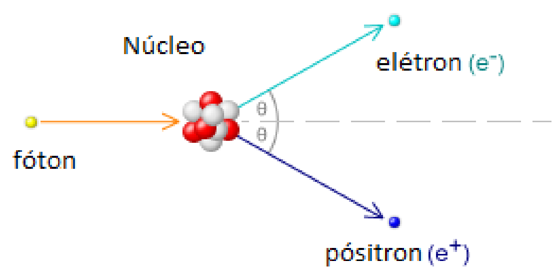

Figura 1: Processo de produção de pares. Um fóton com energia igual o maior do que a energia de repouso do par elétron-fóton, nas proximidades de um núcleo, pode produzir um par e^-e^+.

Créditos: http://extremethinkover.com/

Aniquilação de Pares

O processo inverso também pode ocorrer. Na aniquilação de pares, um par elétron-pósitron pode ser aniquilado resultando na criação de dois ou mais fótons (ao menos dois fótons devem ser produzidos de forma que a energia e o momentum linear associados ao processo sejam conservados). Diferentemente do processo de produção de pares, o processo de aniquilação de pares pode ocorrer no espaço vazio e em princípio as leis de conservação de energia e de momentum linear podem ser ambas aplicadas:

1. Conservação de Energia Total: consideramos as energias inicial (E_i) e final (E_f) do processo, tal que

$$E_i = E_f \,. \qquad (20)$$

Esta expressão pode ser reescrita na forma:

$$2m_{e0}c^2 + E_{ce} + E_{cp} = hf_1 + hf_2 \,, \qquad (21)$$

supondo-se aniquilação do par e^-e^+ em dois fótons, com frequências f_1 e f_2.

2. Conservação de Momentum Linear: consideramos os momenta inicial ($\vec{P}_i$) e final ($\vec{P}_f$) do processo, tal que

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \,. \qquad (22)$$

Esta expressão pode ser escrita na forma

$$m_{p0}\vec{v}_p + m_{e0}\vec{v}_e = \hbar\vec{k}_1 + \hbar\vec{k}_2 \qquad (23)$$

onde os símbolos $\vec{v}_p$ e $\vec{v}_e$ representam as velocidades de propagação do pósitron e do elétron, respectivamente, e os símbolos $\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2$ denotam os vetores número de onda dos fótons. É importante lembrar que o número de onda se relaciona com o correspondente comprimento de onda na forma $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$.

Problemas

1. Dois foguetes, A e B, viajam respectivamente para a direita e para a esquerda, relativamente à Terra, com velocidades dadas respectivamente por $0,8c$ e $0,6c$. Qual é a velocidade do foguete A medida no foguete B? Solução: $0,946c$.

2. Calcule a energia cinética de um elétron cujo momentum linear é $2MeV/c$. Solução: $K = 1,55MeV$.

3. Calcule o momentum linear de um elétron com energia cinética igual a $1MeV$. Solução: $p = 1,42MeV/c$.

4. Compute a massa efetiva de um fóton cujo comprimento de onda é $5.000\AA$. Solução: $4,42 \times 10^{-36}Kg$.

5. Um elétron é acelerado a uma energia de $2GeV$ em um acelerador de partículas. Qual é a razão entre as massas em movimento e em repouso do elétron? Solução: 3.915.

6. Um fóton de comprimento de onda $0,003 \times 10^{-10}$m produz, na vizinhança de um núcleo, um par elétron-pósitron. Determine a energia cinética de cada uma das partículas se a energia cinética do pósitron é igual a duas vezes a energia cinética do elétron. Solução: $1,04$MeV e $2,08$MeV.

7. Encontre as energias de cada um dos dois fótons produzidos em um processo de aniquilação entre um próton e um antipróton em repouso. Solução: $938,3$MeV.

8. Repita o problema anterior no caso de um nêutron e um antinêutron. Solução: $939,6$MeV.

9. Repita o problema anterior no caso da aniquilação de um par elétron-pósitron. Solução: $0,511$MeV.

10. Determine o comprimento de onda limiar para a produção de um par próton-antipróton. Solução: $6,61 \times 10^{-10}$m.

11. Mostre que a produção de pares não pode ocorrer no espaço vazio.

12. a) Encontre o comprimento de onda e a frequência de um fóton de energia igual a $1,0$keV. b) Encontre o momentum de um fóton de energia igual a $12,0$MeV. c) Calcule a frequência de um fóton produzido no processo em que um elétron, de energia cinética inicial igual a 20keV, atinge o repouso ao colidir com um núcleo pesado. Mostre que o momentum linear não é conservado neste processo. Solução: a) $12,4\ \AA$, $2,42 \times 1017$Hz; b)12MeV/c; c)$4,84 \times 1018$Hz.

13. a) Encontre o comprimento de onda máximo de um fóton que tem energia suficiente para separar uma molécula cuja energia de ligação é 15eV. b) Se o comprimento de onda máximo de um fóton que pode separar uma molécula diatômica é $3000\AA$, qual é a energia de ligação molecular? c) Que energia tem um fóton se o seu momentum linear for igual ao momentum linear de um elétron com energia cinética igual a 3MeV? d) Qual e o momentum linear de um fóton que tem o mesmo valor da energia cinética de uma partícula emitida por um nucleo de B? Solução: a) $827\AA$, b)$4,13$eV, c)$3,47$MeV, d) E_c/c.

14. Uma fonte luminosa de frequência igual a 6×10^{14}Hz produz 10W. Quantos fótons são produzidos em 1 segundo? Solução:$2,52 \times 10^{19}$fótons.

15. Um fóton de raios-X de $0,3$MeV colide frontalmente com um elétron inicialmente em repouso. Usando a lei de conservação de energia e momentum linear, encontre a velocidade de recúo do elétron. Solução:$0,65$c.

16. Calcule os comprimentos de onda Compton de um próton. Solução:$1,32 \times 10^{-5}\AA$.

17. Determine a modificação relativa no comprimento de onda de um fóton de raio X de comprimento de onda inicial de $0,400\AA$ que sofre um espalhamento Compton com um elétron em um ângulo de 90^o. Solução:$0,0608$.

18. Um fóton de raio X de comprimento de onda $0,300\AA$ sofre espalhamento Compton em um angulo de 60^o. a) Determine o comprimento de onda do fóton espalhado. b) Determine a energia do elétron após o espalhamento. Solução: a) 0,312 A, b) 1,59keV. 13. Mostre que um eletron livre em repouso nao pode absorver um foton. 14. Derive a equacao de Compton.

19. Paradoxo dos gêmeos. Na Relatividade Especial, o paradoxo dos gêmeos é uma experiência de pensamento na qual um gêmeo, A, faz uma viagem ao espaço em um foguete à velocidade próxima a da luz e ao voltar para casa descobre que sua idade é inferior à idade de seu irmão gêmeo idêntico, B, que ficou na Terra. a) Esta experiência de pensamento está de acordo com a Relatividade Especial? Este paradoxo é real ou é aparente? Explique sua resposta. b) Considere os seguintes dados: A em uma nave com velocidade igual a $0,9c$. B fica na Terra durante 30 anos. Qual a diferença de idade entre ambos? Solução: a) não se trata de fato de um paradoxo pois a nave deve acelerar até atingir velocidade de cruzeiro e desacelerar para retornar à Terra. Portanto, o problema não é simetricamente perfeito, na medida em que durante os processos de aceleração e desaceleração da nave o astronauta A está em um referencial não inercial, não valendo portanto as leis de sincronismo de relógios considerada nas transformações de Lorentz. b) Mas como durante grande parte do trajeto os dois referenciais, Terra e nave, são referenciais inerciais, realizamos o cáclulo desconside-

rando as etapas de aceleração e desaceleração. O resultado final é que o gêmeo que permaneceu na Terra estará 13 anos mais velho do que seu irmão.