UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Instituto de Física
Departamento de Física
Disciplina: Física do Século XX B
Prof. César Augusto Zen Vasconcellos
LISTA TEMÁTICA E DE PROBLEMAS No. 2 - Movimento Orbital de Elétrons e o Efeito ZEEMAN (PIETER ZEEMAN (1865-1943)). Momentum Angular Orbital: ponto de vista clássico. Abordagem Clássica do Momento Magnético de Dipolo. Energia de um Dipolo Magnético em um Campo Magnético Externo: ponto de vista clássico. A Experiência de ZEEMAN. Quantização da Magnitude do Momentum Angular Orbital. Quantização da Direção do Momentum Angular Orbital. Explicação do Efeito ZEEMAN.

Força Central. Na mecânica clássica, uma força central é caracterizada por uma magnitude que depende, apenas, na distância r do objeto ao ponto de origem da força e que é dirigida ao longo do vetor que caracteriza esta distância:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(|\mathbf{r}|)\hat{\mathbf{r}} \quad (1)$$

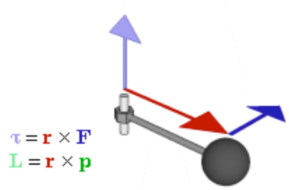
ou seja, uma força central é aquela cuja direção passa sempre pelo centro da trajetória; nesta expressão, **F** é a força**,** *F* representa o módulo da força, **r** é o vetor de posição, |**r**| denota o módulo deste vetor e introduzimos um vetor unitário para caracterizar a direção vetorial da força.

Uma força central é conservativa. Portanto, uma força central pode ser expressa em termos de um gradiente negativo de potencial

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (2)$$

tal que

$$V(\mathbf{r}) = \int_{|\mathbf{r}|}^{+\infty} F(r)\,\mathrm{d}r \quad (3)$$



Em um campo conservativo, a energia mecânica total é conservada:

$$E = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 + V(\mathbf{r}) \quad (4)$$

Definimos o momentum angular orbital de uma partícula de massa m

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5)$$

(onde **p** = m**v**) e o torque de uma força **F** na forma

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (6)$$

A derivada no tempo do momentum angular é

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \quad (7)$$

Esta expressão pode ser escrita na forma

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \times m\mathbf{v} \quad (8)$$

ou então como

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (9)$$

$$\tau = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} \quad (10)$$

No caso de uma força central, o produto vetorial **r** × **F** é nulo (**r** × **F** = 0) e portanto d**L**/dt = 0 e então o momentum angular orbital **L** é conservado.

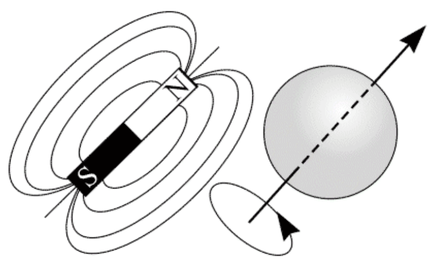
Momento de Dipolo Magnético Clássico. Um elétron em movimento em uma órbita circular de raio r produzirá por sua vez uma corrente

> I = (carga do elétron) × (número de vezes por segundo que o elétron passa em determinado ponto da trajetória) = $e\nu$

onde ν representa a freqüência de rotação do elétron. O movimento circular do elétron produzirá ademais um campo magnético, similar ao campo magnético produzido por barras magnéticas, cujo momento de dipolo magnético é dado, no caso de uma trajetória planar de corrente, cuja área é πr^2, pela expressão:

$$\boldsymbol{\mu} = I\boldsymbol{A} \quad (11)$$

$$|\boldsymbol{\mu}| = IA = (e\nu)(\pi r^2) \quad (12)$$



No caso de uma trajetória arbitrária, o momento de dipolo magnético pode ser escrito na forma

$$\vec{\mu} = I \int d\mathbf{a} \quad (13)$$

E no caso de uma distribuição arbitraria de corrente, o momento de dipolo magnético é dado por

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J}\, dV \quad (14)$$

onde

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (15)$$

Uma vez que, no caso considerado,

$$|\mathbf{L}| = mvr = m\,(2\pi r\nu)\,r = 2m\,(\nu\pi r^2) \quad (16)$$

e

$$\mu = e\,(\nu\pi r^2) = (e/2m)L \quad (17)$$

resultando então, uma vez que a carga do elétron é negativa, em

$$\boldsymbol{\mu} = -\,(e/2m)\,\mathbf{L} \quad (18)$$

Energia de Momento de Dipolo Magnético em Campo Magnético Externo: caso clássico. Suponhamos o caso em que uma espiral de corrente é colocada sob a ação de um campo magnético externo de intensidade **B**. Neste caso, haverá um torque dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (19)$$

O sistema adquire então uma energia potencial, E_B, tal que

$$E_B = -\,\boldsymbol{\mu}.\mathbf{B} \quad (20)$$

Esta expressão pode ser deduzida seguindo os seguintes passos. Inicialmente determinamos o trabalho realizado pelo torque gerado pelo campo magnético ao atuar sobre o momento de dipolo magnético do átomo:

$$E_B = \int \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}\, d\theta = \int |\boldsymbol{\mu}|\,|\mathbf{B}|\,\mathrm{sen}(\theta)\, d\theta = -\,|\boldsymbol{\mu}|\,|\mathbf{B}|\,\cos(\theta) = -\,\boldsymbol{\mu}.\mathbf{B} \quad (21)$$

Escolhendo, de maneira arbitrária, o eixo z de orientação do campo magnético aplicado, obtemos então:

$$E_B = (e/2m)\,\mathbf{L}.\mathbf{B} = (e/2m)\,L_z\,B \quad (22)$$

O Experimento de Zeeman. O experimento de Zeeman teve como objetivo a medida dos efeitos da interação entre o momento de dipolo magnético interno do átomo e um campo magnético externo. Este experimento foi realizado por Pieter Zeeman em 1896, antes portanto do advento da mecânica quântica. Nesta experiência, um átomo é colocado sob ação de um campo magnético externo, e seu espectro de excitação é então determinado e comparado com o espectro de excitação no caso em que não existe campo magnético externo. Quando o experimento é realizado, encontramos que uma determinada linha do espectro pode sofrer desdobramentos em outras linhas espectrais na presença do campo magnético. Além disso, encontramos que as modificações observadas nas freqüências espectrais das linhas são proporcionais à intensidade do campo magnético externo aplicado. A observação destas linhas espectrais adicionais indicam então que o átomo teria, na presença de um campo magnético externo, níveis discretos de energia adicionais. A explicação do efeito Zeeman exige que no tratamento mecânico ondulatório do problema em foco consideremos que a magnitude e a direção do momentum angular orbital do elétron atômico sejam quantizados. Damos então o nome de efeito Zeeman ao desdobramento das linhas (ou raias espectrais) de um espectro como resultado da presença de um campo magnético B estático. Este experimento pode ser realizado, por exemplo, medindo-se os comprimentos de onda de radiação de uma lâmpada espectral de cádmio. A lâmpada de cádmio é submetida a diferentes intensidades de fluxo magnético e estuda-se o desdobramento da linha do cádmio com λ=643,8 nm por meio do uso de um interferômetro. O efeito Zeeman é muito importante para estudos que envolvem espectroscopia de ressonância magnética nuclear, espectroscopia de ressonância de spin do elétron, espectroscopia Mössbauer, entre outras.

Quantização da Magnitude do Momentum Angular Orbital. De acordo com a Mecânica Quântica e com resultados experimentais, como o efeito Zeeman que veremos a seguir, indicam que o momentum angular orbital do elétron em um átomo é quantizado e que para cada estado de energia dado por $E_n = - E_0/n^2$, existem n estados possíveis do momentum angular tal que

$$|\mathbf{L}| = (\ell(\ell+1))^{1/2}\,\hbar \quad (23)$$

onde ℓ é um número inteiro, tal que ℓ = 0,1,2,..., n-1. Em particular, para o estado de energia mais baixa, n = 1, o valor correspondente de ℓ é zero e o momentum angular orbital é também nulo.

Quantização da Direção do Momentum Angular Orbital. De acordo com a Mecânica Quântica e com resultados experimentais, há indicações, ademais, que, sob a ação de um campo magnético externo, a direção do momentum angular orbital não é arbitrária. Suponhamos que um átomo é colocado sob a ação de um campo magnético externo orientado na direção espacial z. Os resultados indicam que a componente L_z do momentum angular orbital é quantizada, apresentando valores discretos tais que

$$L_z = m_\ell\,\hbar \quad (24)$$

Nesta expressão a grandeza m_ℓ representa o chamado número quântico magnético

$$m_\ell = \ell,\ \ell - 1,\ \ell - 2,\ \dots,\ 0,\ \dots - (\ell - 2),\ - (\ell - 1),\ - \ell \quad (25)$$

Note-se que, para o valor máximo de $m_\ell=\ell$, $L_z=\ell\hbar$ < L. As afirmações acima são corroboradas pelos resultados experimentais do efeito Zeeman? Como veremos a seguir, a resposta a esta indagação é afirmativa.

Explicação do Efeito Zeeman. A teoria clássica da energia dos estados atômicos em presença de um campo magnético externo prevê que a energia do estado fundamental de um átomo de um elétron é modificada pela presença de um termo adicional de energia potencial, tal que

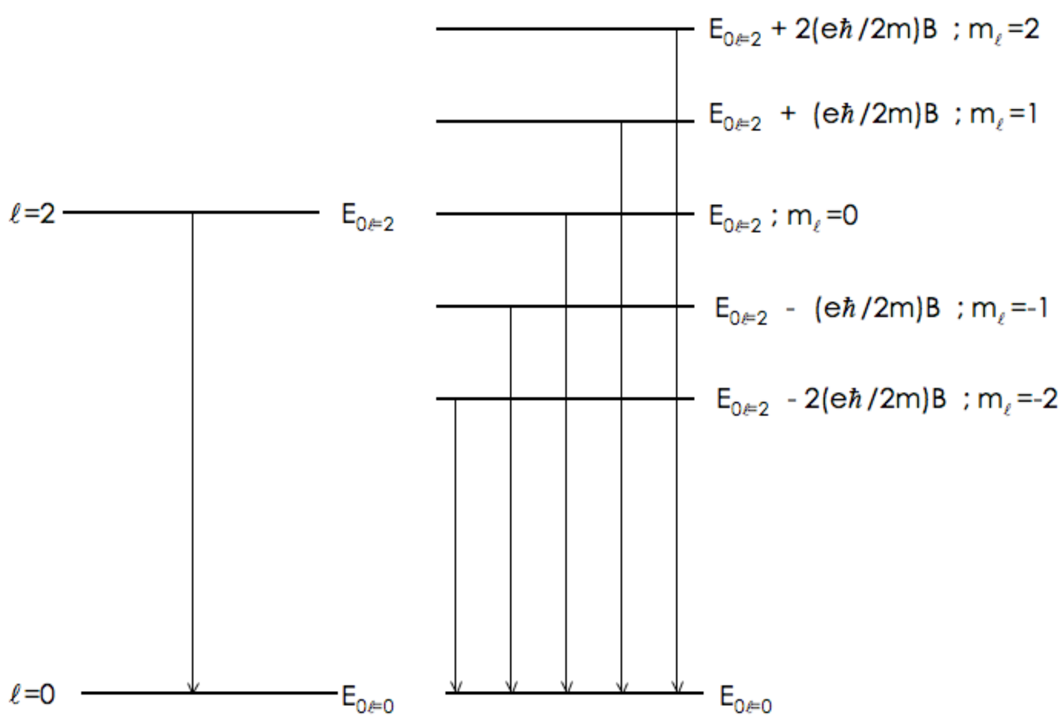
$$E_{\ell m_\ell} = E_{0_\ell} + E_{\ell m_\ell B} = E_{0_\ell} + (e/2m)\,\mathbf{L.B} = E_{0_\ell} + (e/2m)\,L_z\,B \quad (26)$$

Onde E_{0_ℓ} é energia quantizada antes da aplicação do campo externo B. E, em sendo o momentum angular orbital quantizado em sua magnitude e direção, esta expressão é modificada na forma

$$E_{\ell m_\ell} = E_{0_\ell} + m_\ell \, (e\hbar/2m) \, B \quad (27)$$

Assim, na presença de um campo magnético, cada nível de energia sofre um desdobramento em $2\ell+1$ níveis igualmente espaçados em energia, cada um deles com uma energia distinta do outro, sendo o espaçamento de energia proporcional à intensidade do campo magnético, B. O fator $e\hbar/2m = 5{,}79\times10^{-5}$eV/T, é chamado de *magnéton de Bohr*.

Em conseqüência, como há mais níveis discretos de energia presentes no átomo, na presença de um campo magnético B, linhas discretas adicionais serão observadas no espectro de excitação atômico. A figura abaixo ilustra esta nova perspectiva.



As transições energéticas acima representadas são observadas no efeito Zeeman, confirmando assim as predições quânticas apresentadas no texto

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Instituto de Física
Departamento de Física
Disciplina: Física do Século XX B
Prof. César Augusto Zen Vasconcellos
LISTA TEMÁTICA E DE PROBLEMAS No. 2 - Movimento Orbital de Elétrons e o Efeito ZEEMAN (PIETER ZEEMAN (1865-1943)). Momentum Angular Orbital: ponto de vista clássico. Abordagem Clássica do Momento Magnético de Dipolo. Energia de um Dipolo Magnético em um Campo Magnético Externo: ponto de vista clássico. A Experiência de ZEEMAN. Quantização da Magnitude do Momentum Angular Orbital. Quantização da Direção do Momentum Angular Orbital. Explicação do Efeito ZEEMAN.

Problemas

1. Determine o momento magnético de um elétron em movimento orbital em um círculo de raio r em torno de um próton. Solução: $\mu = (e^2/2)\sqrt{(kr/m)}$.
2. Calcule a freqüência com que o momento magnético orbital do elétron precessiona (precessão de Larmor) em um campo magnético B. Solução: $(e/2m)B$ (freqüência de Zeeman).
3. Usando os resultados da mecânica quântica, calcule os momentos magnéticos do elétron para o nível n = 3. Solução: a) para $\ell = 2$, $\mu = 2{,}27\times10^{-23}$ J/T ; b) para $\ell = 1$, $\mu = 1{,}31\times10^{-23}$ J/T; c) para $\ell = 0$, $\mu = 0$.
4. Mostre as orientações possíveis do vetor momentum angular orbital para ℓ = 0,1,2,3 e 4.
5. Determine o desdobramento Zeeman para a linha vermelha do cádmio com 6438Å quando os átomos são colocados em um campo magnético de 0,009T. Solução: $1{,}74\times10^{-3}$Å.
6. Que densidade de fluxo magnético B é necessária para observar o efeito Zeeman se um espectrômetro pode discriminar linhas separadas por 0,5Å para o comprimento de onda de 5.000Å? Solução: 4,28 T.
7. Em uma experiência de Zeeman, a linha caracterizada por 4226Å se subdivide em 3 linhas separadas por 0,25Å em um campo magnético de 3T. Determine, usando estes dados, a relação e/m para o elétron. Solução: $e/m = 1{,}76\times10^{11}$ C/kg.
8. Transições energéticas ocorrem em um átomo entre estados com $\ell=2$ e $\ell=1$, em um campo magnético de 0,6T. Se o comprimento de onda antes que o campo magnético é acionado for 5000Å, determine os comprimentos de onda observados. Solução: 5000,07Å, 5000Å, 4999,93Å.