Princípio da Incerteza de Heisenberg

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Instituto de Física. Departamento de Física. Física do Século XXA (FIS1056). Prof. César Augusto Zen Vasconcellos. **Lista 8** (*Site: www.cesarzen.com*)

Tópicos. Pacotes de Onda. Pacotes de Onda de Matéria. Experimento da Dupla Fenda de Thomas Young[1] (Inglaterra, 1773-1829). Princípio da Incerteza de Werner Heisenberg (Alemanha, 1901-1976). Ondas e Relações de Louis De Broglie (França, 1892-1987). Interpretação Probabilística para a Radiação Eletromagnética, Interpretação Probabilística das Ondas de Louis de Broglie.

Ondas Clássicas, Pacotes de Ondas e Relações Clássicas de Indeterminação

Ondas clássicas são soluções de equações de onda que obedecem as leis de Newton da Mecânica Clássica. Apenas como um exemplo apresentamos abaixo a equação de movimento para o deslocamento trasverso de uma corda esticada em uma dimensão:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\,. \tag{1}$$

Nesta expressão, $y(x,t)$ é a amplitude da corda na posição x e no instante t e v representa a velocidade de propagação da onda.

A solução desta equação pode ser representada na forma

$$y(x,t) = y_0\, cos(kx - \omega t)\,, \tag{2}$$

onde y_0 representa a amplitude ondulatória, ω a frequência angular e k o número de onda. É importante lembrar que a frequência[2] f e a frequência angular da onda estão relacionadas na forma $\omega = 2\pi f$; da mesma forma, a relação entre a frequência f, a frequência angular ω e o período de ondulação, T, pode ser expressa na forma

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}\,. \tag{3}$$

O número de onda k e o comprimento de onda estão relacionados por sua vez na forma $k = 2\pi/\lambda$. Por fim, é importante definir duas grandezas importantes no movimento ondulário, a velocidade de vase[3], v_f,

$$v_f = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}\,, \tag{4}$$

[1] O experimento de fenda dupla é um dos mais importantes experimentos realizados na história da física. Thomas Young, porém, é famoso não somente por este experimento mas por suas variadas incursões no mundo do conhecimento que envolvem ter decifrado partialmente os hieróglifos egípcios, em parte, (mais especificamente, hieróglifos da Pedra de Roseta) antecedendo Jean-François Champollion, bem como por suas contribuições científicas importantes nos temas da visão e da luz, da mecânica dos sólidos, da energia, da fisiologia, da línguistica e da harmonia musical.

[2] Frequência de uma onda é uma grandeza física que indica o número de ocorrências de um determinado evento cíclico em um determinado intervalo de tempo. Exemplos destas ocorrências ondulatórias: ciclos, voltas, oscilações, entre muitos outros.

[3] A velocidade de fase é, como o nome bem diz, a velocidade de propagação da fase de uma onda no espaço. Uma fase ondulatória representa por sua vez uma fração de um ciclo de uma onda como, por exemplo, o ciclo correspondente à amplitude máxima ondulatória.

e a velocidade de grupo[4], v_g:

$$v_g = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \,. \tag{5}$$

A definição acima somente se aplica no caso da presença de pacotes de onda que representam pulsos localizados no espaço real e no espaço de frequência. A função $\omega(k)$ é denominada de relação de dispersão. Se ω for diretamente proporcional ao número de onda k, então a velocidade de grupo é exatamente igual à velocidade de fase.

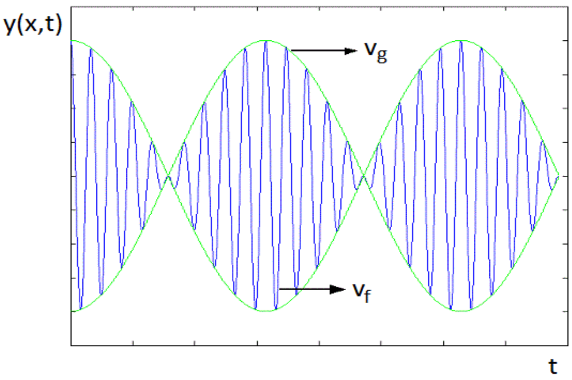

Figura 1: Velocidades de fase (v_f) e de grupo (v_g) em um pacote de ondas.

Créditos: http://gl.wikipedia.org/

[4]A velocidade de grupo de uma onda é um conceito que se aplica a pacotes de onda. Um pacote de onda é caracterizados por uma envoltória, ou envelope, que modula uma superposição de ondas harmônicas. A velocidade de grupo é a velocidade com que o envelope do pacote de ondas propaga através do espaço. Um exemplo recorrente para explicar este fenômeno é o lançamento de uma pedra na água de um rio. Quando a pedra atinge a superfície da água, se forma um grupo de ondas adjacentes de padrão circular em torno de um centro em repouso. Estes circulos de ondas adjacentes aumentam de tamanho com velocidades distintas, isto é, com distintas velocidades de fase, algumas com maiores velocidades e outras com menores velocidades, mas nenhuma delas ultrapassa o limite de velocidade da onda circular seguinte. O grupo como um todo se propaga porém com uma velocidade característica. Esta velocidade é denominada de velocidade de grupo.

Para demonstrar que a expressão matemática (2) representa uma solução da equação diferencial (1)

Experimento da Dupla Fenda de Young.

Nesse experimento, Thomas Young demonstrou, em 1801, o caráter ondulatório da luz pois o fenômeno de interferência observado era uma característica exclusivamente ondulatória (ver figura abaixo). Na experiência de Young, a luz passa através de uma fenda estreita que provoca a sua difração e atinge, após passar pela fenda, uma placa que contem duas outras fendas, também estreitas, muito próximas. Estas fendas dão origem a duas novas difrações da luz. À medida em que as ondas de luz passam pelas duas fendas e se difratam, colidem. Por vezes as ondas colidentes têm fases idênticas, e em outras, opostas, havendo evidentemente, situações intermediárias a estas. No primeiro caso extremo, as ondas se adicionam originando o fenômeno da interferência construtiva. No segundo caso extremo, anulam-se e teremos então o fenômeno da interferência destrutiva. Situações intermediárias a estas, evidentemente, podem ocorrer. O efeito dos dois tipos extremos de interferência pode ser verificado porque produzem franjas claras ou escuras ao atingirem o écran. As situações intermediárias supra mencionadas originam franjas menos claras ou menos escuras em diferentes gradações.

Medições e Incertezas

Imaginemos que se busca determinar a localização de um corpo material como um elétron através de um experimento de fenda única. O padrão de difração que este tipo de experimento apresenta é mostrado na figura abaixo.

Assim, com uma incerteza Δx, a posição da partícula é determinada. Quanto menor for a

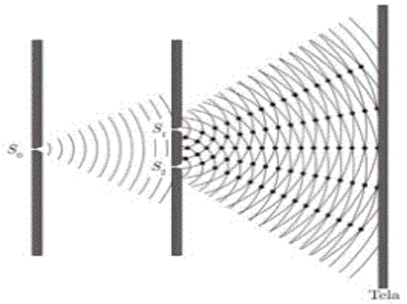

Figura 2: Experimento de dupla fenda de Thomas Young. Vista superior do experimento realizado em 1801.

Créditos: http://www.scielo.br/

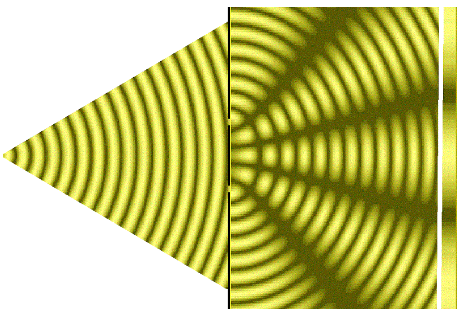

Figura 3: Experimento de dupla fenda.

Créditos: http://www8.georgetown.edu/

dimensão da fenda mais precisa será a determinação da localização da partícula. Devido porém à natureza ondulatória da matéria, a partícula será difratada ao passar pela fenda e não seremos capazes de predizer que ponto do anteparo a partícula atingirá. O processo de difração tem um efeito importante no momentum linear da partícula. Antes de passar pela fenda, a posição da partícula era completamente desconhecida mas seu momentum linear era conhecido, com precisão absoluta, tanto no que diz respeito à sua magnitude (supondo-se que sua energia fosse previamente conhecida) como no que diz respeito à sua direção (perpendicular ao anteparo). Quando a partícula passa pela fenda, determinando desta forma sua posição, a componente perpendicular ao

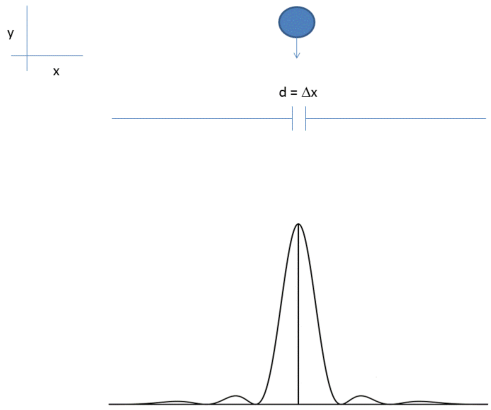

Figura 4: Experimento de fenda única. A figura mostra uma partícula incidente em fenda única e o correspondete padrão de difração ondulatório.

movimento de seu momentum linear deixa de ser nula uma vez que a partícula pode atingir pontos arbitrários do anteparo, segundo mostra o padrão de difração. Uma vez que não se sabe o ponto da película atingido pela partícula, há uma incerteza Δp_x na componente transversal, p_x, de seu momentum linear. Idêntico raciocínio pode ser realizado na experiência de dupla fenda de Young.

Relação de Incerteza para a Posição e o Momentum Linear

A partir destes resultados, Werner Heisenberg estabeleceu o Princípio da Incerteza. O Princípio de Incerteza de Heisenberg estabelece então as incertezas associadas a Δp_x e Δx:

$$\Delta p_x \, \Delta x \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \, . \tag{6}$$

Relação de Incerteza para a Energia e o Tempo

O Princípio de Incerteza de Heisenberg estabelece também as correspondentes incertezas associadas à energia e ao tempo de processos quânticos, ΔE e Δt, na forma: O Princípio de Incerteza de Heisenberg estabelece então as incertezas associadas a Δp_x e Δx:

$$\Delta E\,\Delta t \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}\,. \tag{7}$$

Princípio da Complementaridade

O Princípio da Incerteza estabelece que é impossível em um único experimento medir variáveis conjugadas com precisão absoluta. Como resultado, os aspectos de partícula e ondulatórios da matéria não podem ser determinados (e reveladors) em uma mesma experiência. Isto deu origem ao Princípio da Complementaridade, enunciado por Niels Bohr em 1928:

Os aspectos de partícula e ondulatórios da matéria são complementares um ao outro uma vez que ambos os aspectos são necessários para compreendermos as propriedades e a natureza da matéria; mas ambos aspectos não podem ser simultaneamente observados.

Ondas e Relações de De Broglie. Resultados Experimentais: Resultados experimentais como, por exemplo, o efeito fotoelétrico ou o efeito Compton, somente podem ser explicados se considerarmos que a radiação eletromagnética é composta por entidades corpusculares, os fótons, partículas que viajam à velocidade da luz e cuja massa de repouso é nula. Sabe-se porém, por meio de outros tipos de experimentos, como aqueles acima apresentados, que envolvem fenômenos de interferência e difração ondulatória, que a radiação eletromagnética também se comporta como uma onda. Desta forma, a radiação eletromagnética apresenta o que se convencionou denominar de dualidade onda-partícula: em certas circunstâncias, a radiação eletromagnética se comporta como uma onda e em outras como uma partícula ou como um feixe de partículas. Informações básicas. É essencial entender com clareza a distinção entre estes dois aspectos, uma vez que representam os únicos modos de transmissão de energia. Uma partícula pode ser entendida, de uma maneira mais rudimentar, como uma entidade física que ocupa uma posição no espaço-tempo, e que carrega momentum linear, energia cinética, massa e carga elétrica, por exemplo. Os atributos de uma onda são em princípio distintos daqueles: comprimento de onda, freqüência, amplitude, intensidade, embora carregando também, similarmente a uma partícula, energia, velocidade e momentum linear. A mais importante distinção entre as duas entidades físicas enfocadas que se pode apresentar de um ponto de vista clássico é que, enquanto uma partícula pode estar localizada no espaço-tempo, uma onda apresenta-se, por assim dizer, estendida, ocupando portanto uma porção relativamente grande do espaço.

Ondas de De Broglie

Em 1924, Louis De Broglie propôs que a radiação eletromagnética poderia comportar-se em certas condições como onda e em outras apresentar um caráter de partícula elementar. Mesmo uma partícula elementar massiva, portanto material, como o elétron, poderia, segundo ele, comportar-se, em determinadas circunstâncias, como uma onda. Em outras palavras, ele pressupôs que se um objeto material passasse através de uma fenda, cujas dimensões fossem comparáveis ao comprimento de onda correspondente a esta partícula, então este objeto corpuscular poderia sofrer difração, de maneira similar ao que ocorre quando fótons são difratados em uma experiência de fenda única.

Teoria de De Broglie

Dado um fóton se propagando no espaço, De Broglie identificou nas expressões de sua frequência, f

$$f = \frac{E}{h}\,, \tag{8}$$

e de seu comprimento de onda, λ, de propagação

$$\lambda = \frac{h}{p}\,, \tag{9}$$

onde E representa sua energia, p seu momentum linear e h a constante de Planck, que os termos dos lados esquerdos destas duas equações envolvem o caráter ondulatório dos fótons (freqüência e comprimento de onda) enquanto os termos dos lados direitos das equações acima envolvem os aspectos corpusculares destas entidades físicas (energia e momentum linear). A conexão entre estas duas concepções se dá, como se pode depreender das equações acima, por meio da constante de Planck, h. De Broglie conjeturou que, uma vez que a natureza apresenta as mais diversas simetrias, por que a dualidade onda-partícula só poderia ter validade para partículas de massa nula? Por que na natureza partículas de massas diferentes de zero não estariam sujeitas ao mesmo princípio da dualidade. De Broglie, a partir destas conjecturas, postulou então que um corpo material tem um comprimento de onda dado por

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}\,, \tag{10}$$

onde v representa a velocidade da partícula. Assim, qualquer objeto físico, independentemente do fato de ser massivo ou não, apresentaria o caráter de dualidade onda-partícula. As relações de De Broglie tomam então a forma dada pelas expressões (8) e (9). Estas expressões podem ser escritas também na forma

$$p = \hbar k\ ,\ E = \hbar\omega\,, \tag{11}$$

onde $\hbar = h/2\pi$, k representa a grandeza número de onda, e ω a frequência angular.

No contexto da Relatividade Especial, as relações de De Broglie podem ser escritas na forma

$$\lambda = \frac{h}{\gamma m_0 v} = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,, \tag{12}$$

e

$$f = \frac{\gamma m_0 c^2}{h} = \frac{m_0 c^2}{h}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{13}$$

onde m_0 é a massa em repouso da partícula, v é a velocidade da partícula, γ é o fator de Lorentz, e c é a velocidade da luz no vácuo.

Redução da Intensidade da Radiação Eletromagnética na Materia

A intensidade da radiação eletromagnética que incide sobre um material é reduzida ao passar através deste material porque fótons do feixe incidente podem ser removidos ou espalhados para direções distintas daquela observada. Isto ocorre devido à combinação de diferentes processos físicos como o efeito Compton, o efeito fotoelétrico e a produção de pares. A intensidade da redução obedece a uma lei exponencial do tipo:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \tag{14}$$

onde I_0 representa a representa a intensidade da radiação incidente no material, μ o coeficiente de absorção linear, que é característico do material absorvedor e x é a espessura ou largura do material. A grandeza μ varia com a energia ou comprimento de onda da radiação; isto ocorre porque diferentes interações predominam para diferentes energias, mas, para uma dada energia dos fótons, esta quantidade é considerada em geral como constante.

Modelo de Bohr e a Teoria de Louis de Broglie

Louis de Broglie observou que sua equação $\lambda = h/p$, leva a uma interpretação física da quantização do momentum angular do elétron orbital no átomo de hidrogênio, como postulado por Bohr. O que ele percebeu é que, dada uma onda estacionária se propagando ao longo de uma circunferência, o comprimento da órbita corresponde a um número inteiro de comprimentos de onda, ou seja $2\pi R = n\lambda$. Desta expressão e da relação de Louis de Broglie $\lambda = h/p$ resulta $2\pi R = n\lambda = nh/p = nh/mv$, onde m representa a msssa do elétron, ou então $mvR = L = nh/2\pi$. Assim, Louis de Broglie tornou possível explicarmos os estados discretos de energia postulados por Bohr em termos de ondas estacionárias bem como uma motivação para a quantização do momentum angular orbital do elétron que foi introduzida, na teoria de Bohr, de maneira *ad hoc*, portanto, sem uma explicação plausível.

Problemas

1. Suponha que o momentum linear de uma partícula pode ser medido com acuro de uma parte em um milhar. Determine a incerteza mínima na posição da partícula se a mesma for (a) uma massa de $0,005$ kg se movendo com velocidade de $2m/s$ e (b) um elétron se movendo com velocidade de $1,8 \times 10^8$m/s. Solução: a)$5,28 \times 10^{-20} \AA$; b) $2,57 \AA$.

2. Qual é a incerteza na localização de um fóton de comprimento de onda $3 \times 10^3 \AA$ se seu comprimento de onda for conhecido com um acuro de uma parte em um milhão? Solução: $23,9$ nm.

3. Qual é a mínima incerteza no estado de energia de um átomo se um elétron permanece neste estado por 10^{-8}s? Solução: $0,329 \times 10^{-7}$eV.

4. Uma partícula de massa m é confinada em uma região unidimensional de comprimento L. Usando argumentos baseados apenas no princípio da incerteza, estime o valor da energia mínima que a partícula pode ter. Solução: $\frac{h^2}{8mL^2}$.